(A) Δίνεται η επιφάνεια S με εξίσωση
$z = x^2 - 2y^2$

i) Να βρεθούν οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις στο $(0,0)$

ii) Να βρεθούν οι ασυμπτωτικές καμπύλες. Υπάρχει δίκτυο ασυμπτωτικών γραμμών

Λύση

Η S είναι κανονική επιφάνεια ως γράφημα της $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
με $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ με συστ. συντεταγμ. $X: \mathbb{R}^2 \to S$

$X(u,v) = (u, v, f(u,v)) = (u, v, u^2 - 2v^2)$

Τα θεμελιώδη ποσά 2ης τάξης της S ως προς το X είναι:

$$e = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 16v}}$$

$$f = \frac{f_{uv}}{\sqrt{\ }} = 0 \quad , g = \frac{f_{vv}}{\sqrt{\ }} = \frac{-4}{\sqrt{1 + 4u^2 + 16v^2}}$$

$$\begin{cases} f(u,v) = u^2 - 2v^2 \\ f_u = 2u \\ f_{uu} = 2 \\ f_{uv} = 0 \\ f_v = -4v \\ f_{vv} = -4 \end{cases}$$

i) Η $w = aX_u(0,0) + bX_v(0,0)$ είναι ασυμπτωτική διευθ. $\Leftrightarrow$

$e(0,0)a^2 + 2f(0,0)ab + g(0,0)b^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$

$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}\, b$

Άρα οι ασυμπτωτ. διευθ.:

$w = \sqrt{2} b X_u(0,0) + b X_v(0,0) = b(\sqrt{2} X_u(0,0) + X_v(0,0))$

$w = -\sqrt{2} b X_u(0,0) + b X_v(0,0) = b(-\sqrt{2} X_u(0,0) + X_v(0,0))$

ii) Η κανονική καμπύλη $c(t)=X(u(t),v(t))$ είναι ασυμπτωτική

$\Leftrightarrow e(u(t),v(t))(u'(t))^2+2f(u(t),v(t))u'(t)v'(t)+g(u(t),v(t))(v'(t))^2=0$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow (u')^2=2(v')^2 \Leftrightarrow u'=\sqrt{2}v'$ ή $u'=-\sqrt{2}v'$

$\Leftrightarrow (u-\sqrt{2}v)'=0$ ή $(u+\sqrt{2}v)'=0 \Leftrightarrow u-\sqrt{2}v=c_1$ ή $u+\sqrt{2}v=c_2$

Απαντάμε $c(t)=X(u(t),v(t))=X(c_1+\sqrt{2}t,t)=(c_1+\sqrt{2}t,t,(c_1+\sqrt{2}t)^2-2t^2)$

$=(c_1+\sqrt{2}t,t,c_1^2+2c_1\sqrt{2}t)=(c_1,0,c_1^2)+t(\sqrt{2},1,2c_1\sqrt{2})$

ευθεία

$c(t)=X(u(t),v(t))=X(c_2-\sqrt{2}t,t)=\dots$ ανάλογα με πάνω

$$K=\frac{h_{uu}h_{vv}-h_{uv}^2}{(1+h_u^2+h_v^2)^2}<0$$

Από θεωρ. $\Rightarrow$ $\exists$ δίκτυο ασυμπτ. καμπυλών.

Θεωρώ $\tilde{u}=u-\sqrt{2}v$, $\tilde{v}=u+\sqrt{2}v$

$(\tilde{u},\tilde{v})=\phi(u,v)=(u-\sqrt{2}v,u+\sqrt{2}v)$

$$\left.\begin{array}{l} u-\sqrt{2}v=\tilde{u} \\ u+\sqrt{2}v=\tilde{v}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=\dfrac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2} \\ v=\dfrac{\tilde{v}-\tilde{u}}{2\sqrt{2}}\end{array}\right. \quad \Bigg|\ (u,v)=y(\tilde{u},\tilde{v})=\left(\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2},\frac{\tilde{v}-\tilde{u}}{2\sqrt{2}}\right)$$

Ορίζω νέα επιφ. $\tilde{X}=X\circ y$

$\Rightarrow \tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v})=X(y(\tilde{u},\tilde{v}))=X\left(\dfrac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2},\dfrac{\tilde{v}-\tilde{u}}{2\sqrt{2}}\right)$

Η φ είναι διαφορομορφισμός γιατί είναι γραμμικός ισομορφισμός

$\Rightarrow \tilde{X}$ είναι σύστημα συντ. της S και μάλιστα δίκτυο ασυμπτωτικών

καμπυλών.

;;;

<u>Ερώτημα</u>: Είναι η S ευθειογενής;

$X(u,v) = c(u) + v\,w(u)$ | ή $c(v) + u\,w(v)$

$X(u,v) = (u, v, u^2 - 2v^2) = (u, 0, u^2) + (0, v, -2v^2)$ ← Λάθος τρόπος

$$z = x^2 - 2y^2 = (x - \sqrt{2}y)(x + \sqrt{2}y)$$

$$\begin{cases} x - \sqrt{2}y = a \\ z = a(x + \sqrt{2}y) \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} x + \sqrt{2}y = a \\ z = a(x - \sqrt{2}y) \end{cases}$$

Ⓐ Δίνεται η επιφάνεια S $z=x^2+y^2$
Να βρεθούν οι κύριες διευθύνσεις στο $p_0=(1,0,1)$

<u>Λύση</u> Η S είναι κανονική επιφάνεια ως γράφημα της $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$h(x,y)=x^2+y^2$ με ωλη επιφάνεια

$X: \mathbb{R}^2 \to S$

$X(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$

Η διεύθυνση $w=aX_u(1,0)+bX_v(1,0)$ είναι κύρια διεύθυνση

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E(1,0) & F(1,0) & G(1,0) \\ e(1,0) & f(1,0) & g(1,0) \end{vmatrix} = 0 \qquad (a,b)\neq(0,0)$$

$$E=1+h_u^2 \qquad F=h_u h_v \qquad G=1+h_v^2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} h=u^2+v^2 & \\ h_u=2u & h_{uu}=2 \\ h_v=2v & h_{vv}=2 \\ & h_{uv}=0 \end{array} \right\}$$

$$e=\frac{h_{uu}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

$$f=0$$

$$g=\frac{h_{vv}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

$E(1,0) = 5$, $F(1,0) = 0$, $G(1,0) = 1$

$e(1,0) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $f(1,0) = 0$, $g(1,0) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\left|\quad\right| = 0 \iff \begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ 5 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \iff ab \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff a = 0 \text{ ή } b = 0$$

<u>Απάντηση</u>: Οι κύριες διευθύνσεις στο P_0 είναι οι $X_u(1,0)$, $X_v(1,0)$

(** Μπορούσαμε και το γράψουμε χωρίς την ορίζουσα γιατί $F = f = 0$)

(A) Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με

$X(u,v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v)$???

Να εξηγηθεί αν είναι ευθειογενής και $\boxed{\text{αναπτυκτή}}$

Τι επιφάνεια είναι;

<u>Λύση</u> Η X_u είναι λεία με $X_u(u,v) = (-\sin u - v\cos u, \cos u - v\sin u, 0)$

$X_v(u,v) = (-\sin u, \cos u, 1)$

$X_u \times X_v = (\dots) \neq 0$

$\|X_u \times X_v\|^2 > 0$

$X(u,v) = (\cos u, \sin u, 0) + (-v\sin u, v\cos u, v)$

$= (\cos u, \sin u, 0) + v(-\sin u, \cos u, 1)$

$= c(u) + v\,w(u)$

$c(u) = (\cos u, \sin u, 0)$

$w(u) = (-\sin u, \cos u, 1) \neq (0,0,0)$

$\rightarrow X(u,v)$ είναι ευθειογενής

$$N(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u,v) = \dots = \frac{1}{\sqrt{1+2v^2}}(\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, -v)$$

$\Rightarrow N(u,v)$ όχι σταθερό κατά μήκος των γενετειρών $u = \text{σταθ}$

$\rightarrow$ Η X δεν είναι αναπτυκτή κατά ορισμό

**

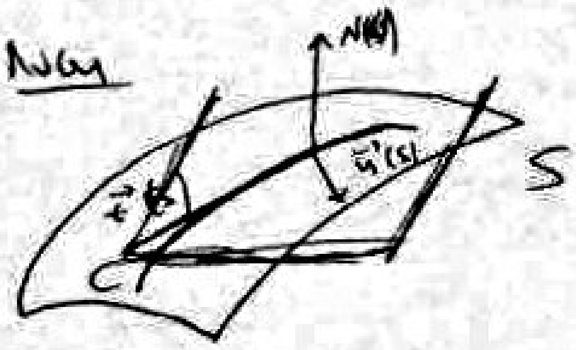
Θα μπορούσαμε να δείξουμε αν είναι αναπτυκτή υπολογίζοντας την καμπυλότητα Gauss K, αν αυτή ισούται του μηδενός στις [illegible] δεν θα [illegible].

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos u - v\sin u \\ y &= \sin u + v\cos u \\ z &= v \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+y^2 = 1 + v^2 \Rightarrow$$

$x^2+y^2 = 1+z^2$ μονόχωνο υπερβολοειδές

Ⓐ Έστω S κανονική επιφάνεια και $c: I \to S$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου και καμπυλότητα $k(s) > 0 \ \forall s \in I$. Αν c είναι συγχρόνως ασυμπτωτική καμπύλη και γραμμή καμπυλότητας, τότε ν.δ.ο. είναι επίπεδη και ότι το επίπεδό της εφάπτεται της επιφάνειας S.
???

Λύση



c: ασυμπτωτική καμπύλη $\Leftrightarrow$

$II_{c(s)}(\dot c(s)) = 0$

$\Leftrightarrow \langle L_{c(s)}(\dot c(s)), \dot c(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\langle dN_{c(s)}(\dot c(s)), \dot c(s)\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle (N\circ c)^{\cdot}(s), \dot c(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow \big(\underbrace{\langle \overset{\text{κάθετα}}{N\circ c(s)}, \dot c(s)\rangle}_{=0}\big)^{\cdot} - \langle (N\circ c)(s), \ddot c(s)\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle N(c(s)), \dot{\vec t}(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle N(c(s)), k(s)\vec n(s)\rangle = 0$

$\Leftrightarrow k(s)\langle N(c(s)), \vec n(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle N(c(s)), \vec n(s)\rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec n(s) \in T_{c(s)}S \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\pm \vec b(s) = N(s)}$ (1)

παραγωγίζω (1) $\Rightarrow$ $\pm \dot{\vec b}(s) = (N\circ c)^{\cdot}(s) \overset{\dot b = -\tau \vec n}{\Leftrightarrow}$

$\boxed{\mp \tau(s)\vec n(s) = (N\circ c)^{\cdot}(s)}$ (2)

Η c είναι γραμμή καμπυλότητας $\overset{\text{Θ. Rodriguez}}{\Leftrightarrow}$ $\boxed{(N\circ c)^{\cdot}(s) = \lambda(s)\dot c(s) = \lambda(s)\vec t(s)}$ (3)

Από (2) κ' (3)

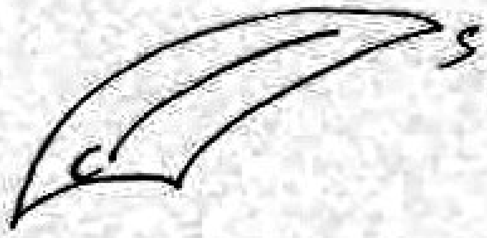
$\mp \tau(s)\vec{n}(s) = \lambda(s)\vec{t}(s) \Rightarrow \tau(s) = 0 \Rightarrow$ η c είναι επίπεδη

Ⓐ Έστω c ασυμπτωτική καμπύλη επιφάνειας S. Αν η καμπυλότητα της c είναι παντού θετική, ν.δ.ο ότι η στρέψη της πληροί το ακόλουθο.

$$(\underset{\tau_c}{\underset{\shortparallel}{\tau \circ c}})^2 = -\overset{\text{καμπυλότητα Gauss της S}}{K} \circ c$$

Λύση

Υποθέτω ότι η c έχει παράμετρο το μήκος τόξου s. Η c είναι ασυμπτωτική καμπύλη



$$\iff k_n(\dot c(s)) = 0 \iff II_{c(s)}(\dot c(s)) = 0 \iff$$

$$\iff \langle L_{c(s)}(\dot c(s)), \dot c(s)\rangle = 0$$

όπως προηγ. θέμα

$$\iff -\langle dN(\dot c(s)), \dot c(s)\rangle = 0 \iff \dots \iff$$

$$\iff \langle N\circ c(s), \ddot c(s)\rangle = 0$$

$$\iff k(s)\langle N\circ c(s), \vec n(s)\rangle = 0 \iff \langle N\circ c(s), \vec n(s)\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pm \vec b(s) = N\circ c(s)}$$

$$\pm \dot{\vec b}(s) = (N\circ c)'(s) \Rightarrow \mp \tau(s)\vec n(s) = (N\circ c)'(s) = dN_{c(s)}(\dot c(s))$$

$$\Rightarrow \tau^2(s) = \|dN_{c(s)}(\dot c(s))\|^2$$

$$\iff \tau^2(s) = \|-L_{c(s)}(\dot c(s))\|^2$$

$$\iff \tau^2(s) = \langle L_{c(s)}(\dot c(s)), L_{c(s)}(\dot c(s))\rangle$$

$$\iff \tau^2(s) = III_{c(s)}(\dot c(s)) \quad (1)$$

Ισχύει σε κάθε σημείο

$$\mathrm{III} - 2H\,\mathrm{II} + K\,\mathrm{I} = 0$$

$$\mathrm{III}_{c(s)}\big(\dot{c}(s)\big) - 2H(c(s))\,\overset{=0}{\cancel{\mathrm{II}_{c(s)}\big(\dot{c}(s)\big)}} + K(c(s))\,\mathrm{I}_{c(s)}\big(\dot{c}(s)\big) = 0$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \tau^2(s) + K\circ c(s)\,\|\dot{c}(s)\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau^2(s) + K\circ c(s) = 0}$$